2022 年度
名城大学オープンキャンパス
模擬講義

視えない世界で図形の面積や体積を測ってみよう
(大学数学への入口)

名城大学　理工学部数学科

はじめに

本日のメニュー

- 視えない世界の三角形の面積
- 視えない世界の四面体の体積
- 視えない世界の球の体積
- 視えない世界の球の表面積

ここでいう「視えない世界」とは，4 次元空間や 5 次元空間のような，次元が 3 よりも高い空間のことを意味します．

$$n \text{ 次元空間} \cdots \text{ 座標が } n \text{ 個の空間}$$

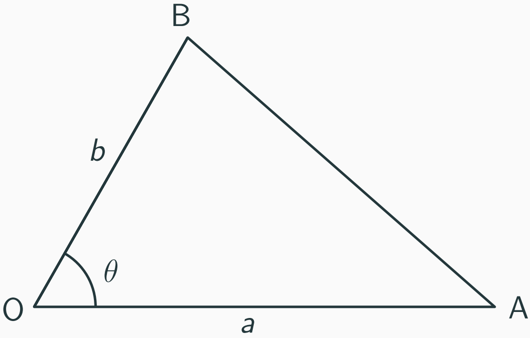
- 高校で学ぶ「ベクトル」と「微分積分」の内容を使います.
- 大学 1 年生で学ぶ「線形代数」「微分積分」の内容も少しだけ使います.
- 分からなくても気にする必要はありません.
- ほんの少し大学の数学を使うだけで物凄く世界が拡がる様子を，雰囲気だけでも味わってもらえれば嬉しいです.

視えない世界の三角形の面積

★ 視える世界の話

三角形の面積の基本公式は

(底辺 × 高さ) ÷ 2

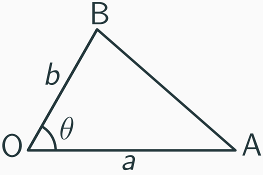


✌ 「三角比」を使った公式

上の図の三角形 OAB の面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

✌ 「ベクトル」を使った公式



$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}$$

とおくと

$$a = |\vec{a}|, \quad b = |\vec{b}|$$

よって

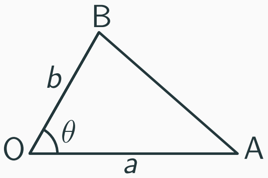
$$S = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

両辺 2 乗

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta = \frac{1}{4}|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\left(1-\cos^2\theta\right) \\ &= \frac{1}{4}\left\{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left(|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\right)^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

したがって

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2} \qquad (❶)$$



★ 視えない世界の話

- 前のページの公式 (❶) は 4 次元空間や 5 次元空間の三角形に対しても通用する！
- ただし，公式を使いこなすためには，視えない世界における $\left|\overrightarrow{a}\right|$, $\left|\overrightarrow{b}\right|$ (ベクトルの大きさ) や $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ (ベクトルの内積) を準備しておく必要がある！

4 次元空間の話

ベクトル $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ に対して，$\overrightarrow{a}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{a}\right|$ を

$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {a_4}^2}$$

と定め，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

と定める.

$\mathrm{O} = (0,0,0,0)$, $\mathrm{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\mathrm{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ とする. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき, 三角形 OAB の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2} \qquad (❶)$$

で与えられる.

5 次元空間, 6 次元空間, . . ., 一般に n 次元空間でも, この公式は使える!

★ 公式 (❶) と『行列式』

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix} = \mathbf{ad} - \mathbf{bc}$$

(2 次の行列式)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} |\vec{a}|^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & |\vec{b}|^2 \end{vmatrix} \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \end{aligned}$$

よって公式 (❶) を

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} & \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} \end{vmatrix}} \qquad (❷)$$

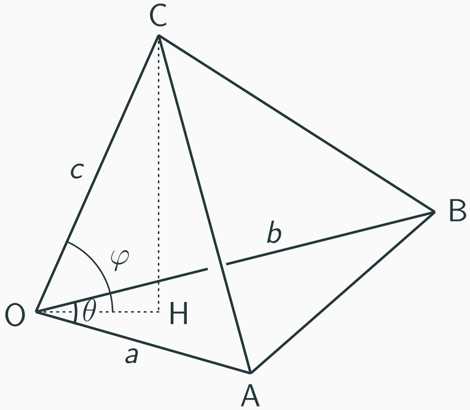
と書くこともできます.

視えない世界の四面体の体積

★ 視える世界の話

四面体の体積の基本公式は

(底面積 × 高さ) ÷ 3



✌ 「三角比」を使った公式

上の図の四面体 OABC の体積を V とおくと

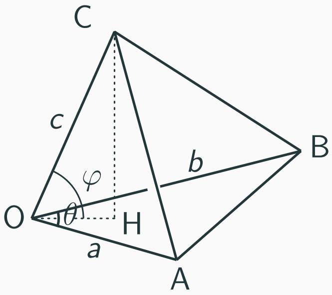
$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}Sc\sin\varphi = \frac{1}{6}abc\sin\theta\sin\varphi}$$

✌ 「ベクトル」を使った公式

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおくと

$$V = \frac{1}{3} S |\overrightarrow{c}| \sin\varphi$$



両辺 2 乗

$$V^2 = \frac{1}{9} S^2 |\overrightarrow{c}|^2 \sin^2\varphi = \frac{1}{9} S^2 (|\overrightarrow{c}| \sin\varphi)^2 = \frac{1}{9} S^2 |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2$$

(❶) を代入して

$$V^2 = \frac{1}{36} \left\{ |\overrightarrow{a}|^2 |\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})^2 \right\} |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2$$

さらに

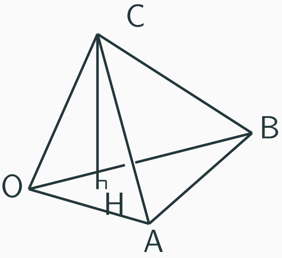
$$\left\{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2\right\}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2$$
$$=|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2|\overrightarrow{c}|^2+2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})$$
$$-|\overrightarrow{a}|^2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})^2-|\overrightarrow{b}|^2(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})^2-|\overrightarrow{c}|^2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2$$

よって

$$V=\frac{1}{6}\left\{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2|\overrightarrow{c}|^2+2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})\right.$$
$$\left.-|\overrightarrow{a}|^2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})^2-|\overrightarrow{b}|^2(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})^2-|\overrightarrow{c}|^2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

(❸)

【青色の式の証明の概略】



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\,\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b} \quad (s,\ t \text{ は実数})$$

と書くと

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{c} = s\,\overrightarrow{a} + t\,\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{b} = 0$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \iff \left|\overrightarrow{a}\right|^2 s + \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)t = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \iff \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)s + \left|\overrightarrow{b}\right|^2 t = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}$$

よって

$$\begin{aligned} s &= \frac{|\overrightarrow{b}|^2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}) - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})}{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}, \\ t &= \frac{|\overrightarrow{a}|^2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}) - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c})}{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2} \end{aligned}$$

これを

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$$

に代入して，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|^2$ を計算すれば，青色の式が得られる．

★ 視えない世界の話

公式 (❸) は 4 次元空間や 5 次元空間の四面体に対しても通用する！

$\mathrm{O} = (0,0,0,0)$, $\mathrm{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\mathrm{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $\mathrm{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ とする． $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とするとき，四面体 OABC の面積 V は

$$V = \frac{1}{6}\Big\{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2|\overrightarrow{c}|^2 + 2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}) - |\overrightarrow{a}|^2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})^2 - |\overrightarrow{b}|^2(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})^2 - |\overrightarrow{c}|^2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2\Big\}^{\frac{1}{2}} \quad (❸)$$

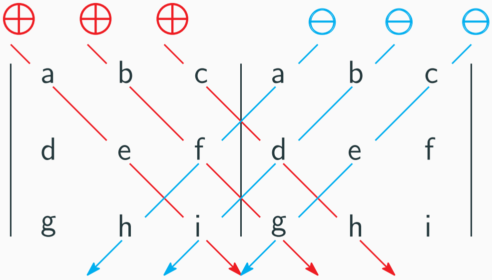
で与えられる．

5 次元空間, 6 次元空間, . . ., 一般に n 次元空間でも，この公式は使える！

★ 公式 (❸) と『行列式』

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = \mathbf{aei} + \mathbf{bfg} + \mathbf{cdh} - \mathbf{afh} - \mathbf{bdi} - \mathbf{ceg}$$

(3 次の行列式)



$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c} \end{vmatrix} \\
&\quad = \begin{vmatrix} |\overrightarrow{a}|^2 & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & |\overrightarrow{b}|^2 & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} & |\overrightarrow{c}|^2 \end{vmatrix} \\
&\quad = |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2|\overrightarrow{c}|^2 + 2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}) \\
&\qquad - |\overrightarrow{a}|^2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})^2 - |\overrightarrow{b}|^2(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})^2 - |\overrightarrow{c}|^2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2
\end{aligned}
$$

よって公式 (❸) を

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c} \end{vmatrix}} \quad (❹)$$

と書くこともできる.

視えない世界の球の体積

★ 視える世界の話

まずは半径 R の円

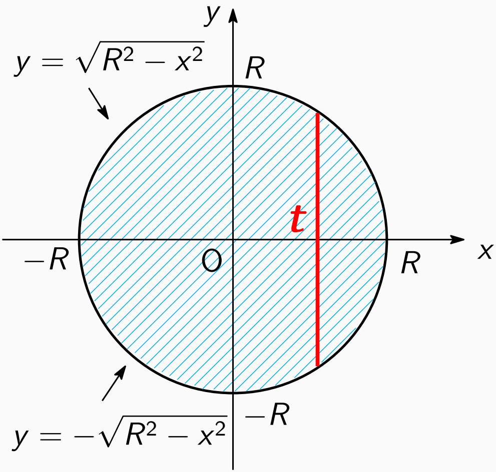
$$x^2 + y^2 \leqq R^2$$

の面積について

半径 R の円の面積は

$$\pi R^2$$

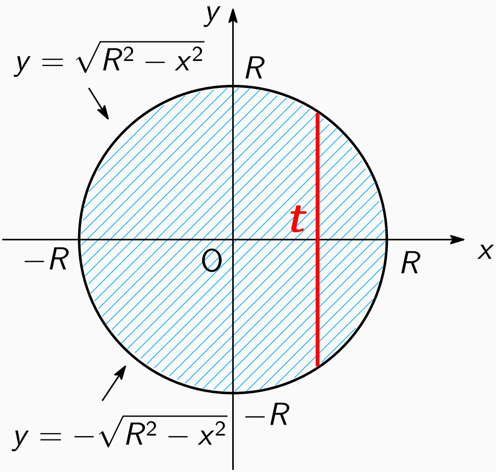
積分を使って確認してみよう.



$x = t$ における切り口の長さは

$$2\sqrt{R^2 - t^2}$$

積分を使って確認してみよう.



よって円の面積を定積分で表示すると

$$\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2-t^2}\,dt$$

$\displaystyle\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - t^2}\, dt$ の計算 (置換積分)

$$t = R\sin\theta$$

とおいた置換積分によって

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - t^2}\, dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{R^2 - R^2\sin^2\theta} \cdot R\cos\theta\, d\theta \\
&= 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta \\
&= 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= 2R^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2
\end{aligned}$$

次に半径 R の球

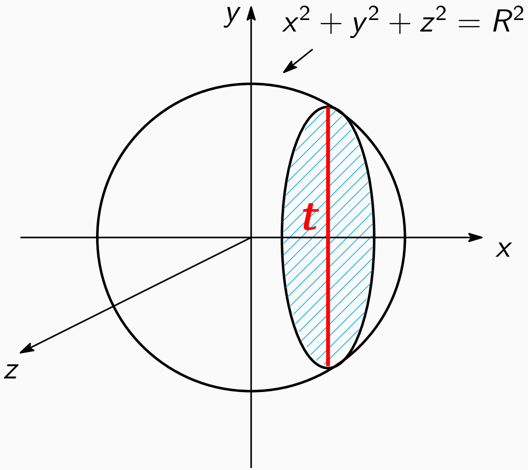
$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2$$

の体積について

半径 R の球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi R^3$$

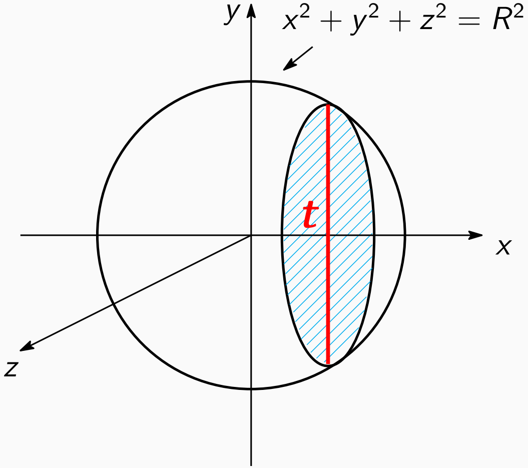
積分を使って確認してみよう.



$x=t$ における切り口は

$$\text{半径 } \sqrt{R^2-t^2} \text{ の円}$$

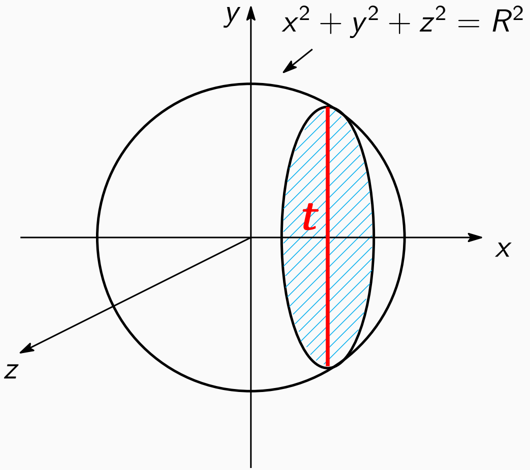
積分を使って確認してみよう．



切り口の面積は

$$\pi(R^2-t^2)$$

積分を使って確認してみよう.



よって球の体積を定積分で表現すると

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - t^2)\,dt$$

$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - t^2)\, dt$ の計算

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - t^2)\, dt &= \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - t^2)\, dt \\ &= \pi \left[R^2 t - \frac{t^3}{3} \right]_{-R}^{R} \\ &= \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi R^3}\end{aligned}$$

★ 視えない世界の話

4 次元空間における半径 R の球

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leqq R^2$$

の体積は？

「切り口積分大作戦」で求まる！

$x = t$ における切り口は

$$\text{半径 } \sqrt{R^2 - t^2} \text{ の } (\text{3 次元の}) \text{ 球}$$

★ 視えない世界の話

4 次元空間における半径 R の球

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leqq R^2$$

の体積は？

「切り口積分大作戦」で求まる！

$x = t$ における切り口の体積は

$$\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{R^2 - t^2}\right)^3$$

★ 視えない世界の話

4 次元空間における半径 R の球

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leqq R^2$$

の体積は？

「切り口積分大作戦」で求まる！

よって 4 次元空間における半径 R の球の体積は

$$\int_{-R}^{R} \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{R^2 - t^2}\right)^3 dt$$

$t = R\sin\theta$ とおいて置換積分をして，長い長い計算をして

$\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{R^2 - t^2}\right)^3 dt$ を求めると

4 次元空間における半径 R の球の体積は

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\pi^2 R^4}$$

であることが分かる.

★ 視えない世界の話

5 次元空間における半径 R の球

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 + x_5{}^2 \leqq R^2$$

の体積は？

「切り口積分大作戦」で求まる！

$x = t$ における切り口は

$$\text{半径 } \sqrt{R^2 - t^2} \text{ の (4 次元の) 球}$$

★ 視えない世界の話

5 次元空間における半径 R の球

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 + x_5{}^2 \leqq R^2$$

の体積は？

「切り口積分大作戦」で求まる！

$x = t$ における切り口の体積は

$$\frac{1}{2}\pi^2\left(\sqrt{R^2 - t^2}\right)^4 \text{ すなわち } \frac{1}{2}\pi^2(R^2 - t^2)^2$$

★ 視えない世界の話

5 次元空間における半径 R の球

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 + x_5{}^2 \leqq R^2$$

の体積は？

「切り口積分大作戦」で求まる！

よって 5 次元空間における半径 R の球の体積は

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\pi^2(R^2 - t^2)^2 \, dt$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\pi^2 (R^2 - t^2)^2 \, dt &= \frac{1}{2}\pi^2 \int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2 t^2 + t^4) \, dt \\
&= \frac{1}{2}\pi^2 \left[R^4 t - \frac{2R^2 t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_{-R}^{R} \\
&= \frac{8}{15}\pi^2 R^5
\end{aligned}
$$

より

> 5 次元空間における半径 R の球の体積は
>
> $$\boldsymbol{\frac{8}{15}\pi^2 R^5}$$

であることが分かる.

半径 R の球の体積

1 次元	$2R$
2 次元	πR^2
3 次元	$\frac{4}{3}\pi R^3$
4 次元	$\frac{1}{2}\pi^2 R^4$
5 次元	$\frac{15}{8}\pi^2 R^5$
n 次元	?

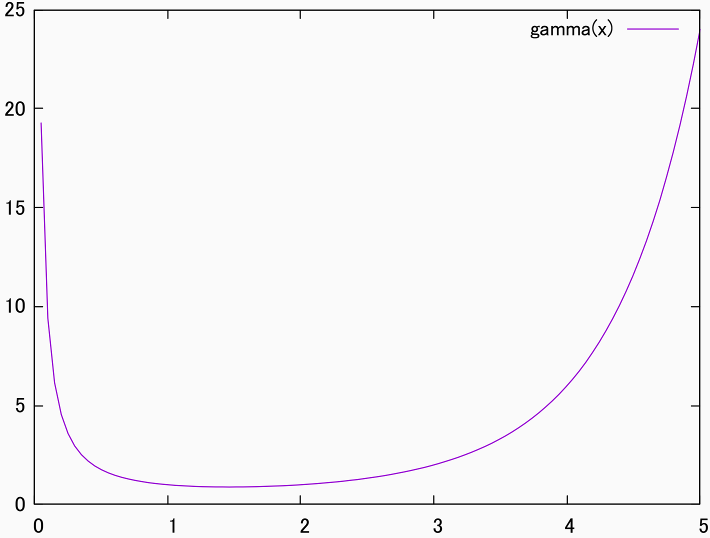
『Γ 関数』登場！

正の実数 x に対して

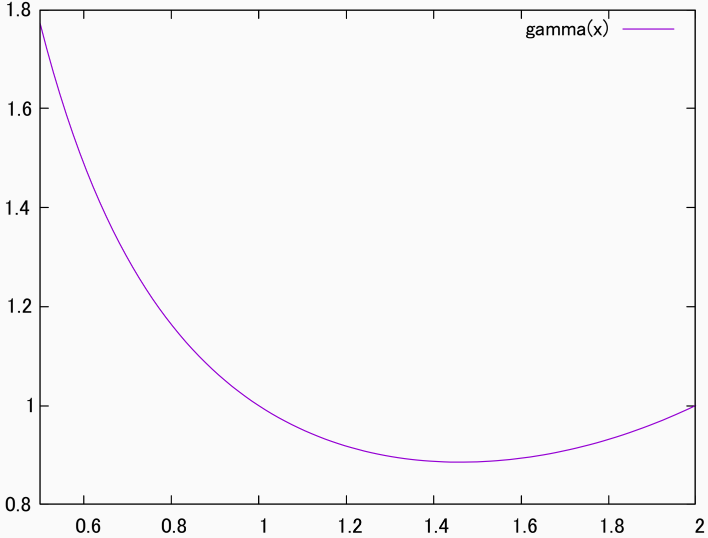
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

$$= \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to+\infty}} \int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad \text{(広義積分)}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} t^{1-1}e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt \\
&= \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to+\infty}} \int_a^b e^{-t}\,dt = \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to+\infty}} \Big[-e^{-t}\Big]_a^b \\
&= \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to+\infty}} \left(-e^{-b} + e^{-a}\right) = 1
\end{aligned}$$



gamma(x)
0
5
10
15
20
25
0
1
2
3
4
5


gamma(x)
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

Γ 関数の性質

$$\boldsymbol{\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \quad (x > 0)} \tag{Γ ①}$$

$$\boldsymbol{\Gamma(1) = 1} \tag{Γ ②}$$

$$\boldsymbol{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}} \tag{Γ ③}$$

(Γ ③) を証明するのが大学 1 年の「微分積分」の大きな目標！

($\mathit{\Gamma}$ ①) と ($\mathit{\Gamma}$ ②) を使うと・・・

$$\mathit{\Gamma}(2) = \mathit{\Gamma}(1+1) = 1 \cdot \mathit{\Gamma}(1) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\mathit{\Gamma}(3) = \mathit{\Gamma}(2+1) = 2 \cdot \mathit{\Gamma}(2) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\mathit{\Gamma}(4) = \mathit{\Gamma}(3+1) = 3 \cdot \mathit{\Gamma}(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$\mathit{\Gamma}(5) = \mathit{\Gamma}(4+1) = 4 \cdot \mathit{\Gamma}(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$\mathit{\Gamma}(6) = \mathit{\Gamma}(5+1) = 5 \cdot \mathit{\Gamma}(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

一般に

自然数 n に対して

$$\mathit{\Gamma}(n+1) = n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 \qquad (\mathit{\Gamma}\ ④)$$

$(\Gamma$ ①$)$ と $(\Gamma$ ③$)$ を使うと

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

のように，自然数 n に対して $\Gamma\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)$ の値を計算することができる．

n 次元空間における半径 R の球の体積 $V_n(R)$ は

$$V_n(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^n}R^n \quad (❺)$$

$n = 1$

$$V_1(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}\sqrt{\pi}R = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\sqrt{\pi}R = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}R = 2R$$

n 次元空間における半径 R の球の体積 $V_n(R)$ は

$$\boldsymbol{V_n(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^n}R^n} \quad (❺)$$

$n = 2$

$$V_2(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^2}R^2 = \frac{1}{\Gamma(2)}\pi R^2 = \frac{1}{1}\pi R^2 = \pi R^2$$

n 次元空間における半径 R の球の体積 $V_n(R)$ は

$$V_n(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^n}R^n \quad (❺)$$

$n = 3$

$$V_3(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^3}R^3 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\sqrt{\pi^3}R^3 = \frac{1}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi^3}R^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

n 次元空間における半径 R の球の体積 $V_n(R)$ は

$$\boldsymbol{V_n(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^n}R^n} \quad (❺)$$

$n = 4$

$$V_4(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^4}R^4 = \frac{1}{\Gamma(3)}\pi^2 R^4 = \frac{1}{2}\pi^2 R^4$$

n 次元空間における半径 R の球の体積 $V_n(R)$ は

$$V_n(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^n}R^n \quad (❺)$$

$n = 5$

$$V_5(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^5}R^5 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\sqrt{\pi^5}R^5 = \frac{1}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi^5}R^5$$

$$= \frac{8}{15}\pi^2R^5$$

視えない世界の球の表面積

★ 視える世界の話

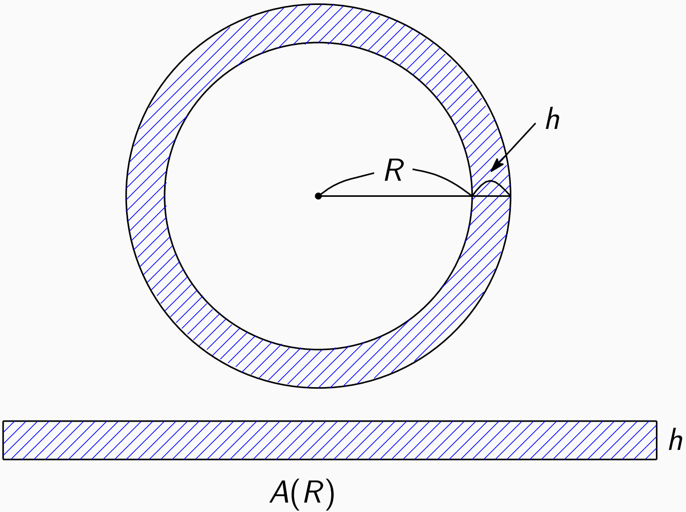
まずは半径 R の円周の長さ $A(R)$ について

半径 R の円周の長さ $A(R)$ は

$$A(R) = 2\pi R$$

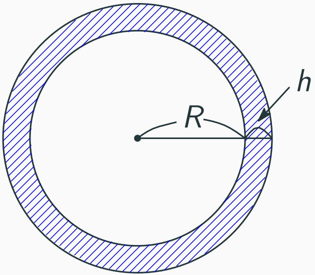
これは円周率 π の “定義そのもの” といってもよいが・・・

微分を使って確認してみよう.



h が 0 に限りなく近く小さければ，上の 2 つの図形の面積はほぼ同じ！

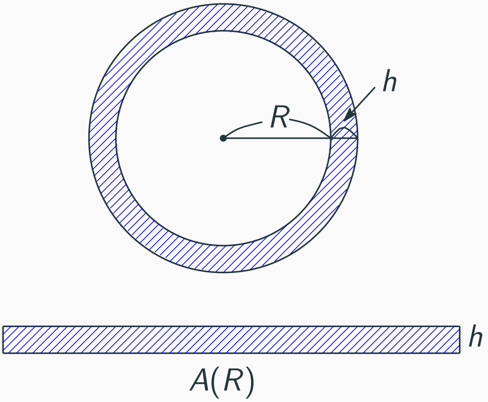
微分を使って確認してみよう.



よって半径 R の円の面積を $S(R)$ とすると

$$A(R)h \fallingdotseq S(R+h) - S(R)$$

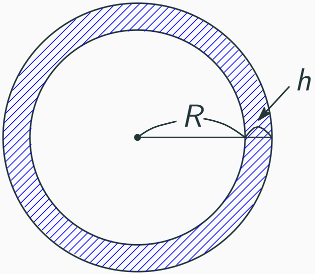
微分を使って確認してみよう.

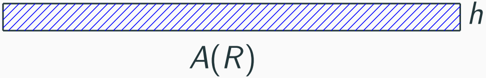


よって

$$A(R) \fallingdotseq \frac{S(R+h)-S(R)}{h}$$

微分を使って確認してみよう.





したがって

$$A(R) = \lim_{h \to 0} \frac{S(R+h) - S(R)}{h}$$

つまり，半径 R の円周の長さ $A(R)$ は，円の面積 $S(R)$ を“微分”することによって

$$A(R) = \frac{d}{dR}S(R) = \frac{d}{dR}(\pi R^2) = \boldsymbol{2\pi R}$$

と求められる．

同じような考え方で，半径 R の球の表面積

$$\boldsymbol{4\pi R^2}$$

も，半径 R の球の体積 $\frac{4}{3}\pi R^3$ を "微分" することによって

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \boldsymbol{4\pi R^2}$$

と求められることが分かる．

n 次元空間における半径 R の球の表面積も，半径 R の球の体積 $V_n(R)$ を"微分"することによって求められる！

$$V_n(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^n}R^n$$

だから

$$\begin{aligned}\frac{d}{dR}V_n(R) &= \frac{n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^n}R^{n-1} = \frac{n}{\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\pi^n}R^{n-1} \\ &= \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\pi^n}R^{n-1}\end{aligned}$$

n 次元空間における半径 R の球の表面積 $A_{n-1}(R)$ は

$$A_{n-1}(R) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\pi^n}R^{n-1} \quad (❻)$$

(一応 $n \geqq 2$ としておく.)

おわりに

- ここまで，視えない世界における図形の面積や体積について，大学で学ぶ数学に少しずつ触れながら，まとまりのない話を幾つかしてきました．
- 面白い，つまらない，感じ方はさまざまだと思います．
- 大学では皆さんがまだ知らない数学をたくさん学ぶことができます．
- その中から自分が面白いと思ったものを見つけ，それについて徹底的に勉強する経験を積んでいただければ幸いです．